

2 Uogólnianie wyników

Filip Chybalski

2.1. Studium przypadku 1

Opis problemu

Przedsiębiorstwo ŚRUBEX zajmuje się produkcją wyrobów metalowych i w jego szerokim asortymencie dominują różnego rodzaju śrubki i wkręty. Śrubki są sprzedawane w opakowaniach o różnej wadze, przy czym najczęściej jest to opakowanie 10-kilogramowe. Pakowanie wyrobów następuje automatycznie na odpowiedniej linii technologicznej, przystosowanej do tego celu. Zarząd chce sprawdzić z 98-proc. prawdopodobieństwem, ile waży przeciętnie 10-kilogramowe (z założenia) pudełko śrubek z błędem nie większym niż $\pm 0,09$ kg. Jeżeli będzie to możliwe, zarząd chciałby również dysponować informacją (na poziomie wiarygodności równym 98%), o ile przeciętnie waga pudełka różni się od jego oczekiwanej wagi.

Odpowiedź na pierwsze pytanie pozwoli zarządowi ocenić, ile waży przeciętnie pudełko śrubek, a tym samym sprawdzić, czy w masowym zjawisku, jakim jest pakowanie śrubek do pudełek, nie ma znaczących nadwyżek lub niedoborów wyrobów (czy np. do 100 pudełek trafia 1000 kg śrubek). Tym samym będzie można odpowiedzieć na pytanie, czy firma nie odnotowuje na etapie pakowania śrubek nieprzewidzianych i niezamierzonych zysków lub strat.

Drugie pytanie dotyczy natomiast tego, ile przeciętnie waga pudełka śrubek różni się od średniej wagi tego pudełka. Odpowiedź na pierwsze pytanie nie dostarcza informacji na ten temat, bowiem fakt, że np. opakowanie waży średnio 10 kg nie oznacza, że każde tyle waży. Jedno bowiem może ważyć 10,1 kg a drugie 9,9 kg, co oznacza tylko, że przeciętnie ważą 10 kg, ale żadne z nich nie waży dokładnie 10 kg. Odpowiedź na pytanie o przeciętne odchylenie od średniej wagi pudełka jest zatem ważna, ponieważ wówczas będzie można ocenić, na ile kilogramów śrubek jest przeciętnie „oszukiwany” klient, przy czym to „oszukiwanie” w tym miejscu ma znaczenie neutralne, tzn. klient może kupić opakowanie o wadze wyższej niż średnia (i skorzystać na tym) lub o wadze niższej niż średnia waga pudełka (i stracić na tym). Ponadto odpowiedzi na oba pytania dostarczą zarządowi informacji o sprawności działania linii technologicznej do pakowania oraz jakości jej obsługi przez pracowników.

Opis metody rozwiązania problemu: dobór próby, przedziały ufności, testy statystyczne

Przedstawiona powyżej przykładowa sytuacja w pewnym przedsiębiorstwie, nawet, jeśli wydaje się, że dotyczy prostego problemu oceny jakości działania linii technologicznej, z punktu widzenia statystyki jest problemem złożonym, wymagającym zastosowania kilku narzędzi statystycznych na różnych etapach jego rozwiązania. Kwestią kluczową jest zrozumienie problemu, gdyż to umożliwi zaplanowanie odpowiednich działań, mających na celu jego rozwiązanie. Następnie należy dobrać odpowiednie narzędzia statystyczne, które pozwolą udzielić odpowiedzi na dwa zadane przez zarząd pytania. Co ciekawe, etap planowania etapów rozwiązania problemu wymaga znacznie więcej kreatywności, aniżeli etap zastosowania metod ilościowych, ponieważ te nie są zbyt zaawansowane i skomplikowane. Zresztą studiując metody ilościowe warto prezentować podejście, że nie jest sztuką nauczyć się skomplikowanych narzędzi statystycznych i nie wiedzieć, jak i kiedy je wykorzystać. Sztuką jest potrafić proste narzędzia statystyczne wykorzystać w praktyce, w tym w praktyce zarządzania przedsiębiorstwem. Właśnie takie podejście znacznie obniża powszechnie panującą awersję do statystyki.

Przeanalizujmy kolejno złożoność przedstawionego problemu. Po pierwsze zarząd sformułował dwa pytania, dotyczące ogółu 10-kilogramowych opakowań śrubek, a nie konkretnej ich partii. Pytanie dotyczy więc pewnej cechy (wagi opakowania śrubek, z założenia 10-kilogramowego) w populacji generalnej tych opakowań. Aby na te pytania odpowiedzieć ze 100-proc. wiarygodnością, należałoby ważyć każde z nich. Jednak zarząd zaznaczył, że satysfakcjonuje go wiarygodność na poziomie 98%. Stąd wiadomo, że badanie może mieć charakter częściowy i w związku z tym może być przeprowadzone na odpowiednio licznej próbie. Pierwsze ważne pytanie, jakie się nasuwa, brzmi: **w jaki sposób ta próba musi być dobrana?**

Ponieważ w oparciu o wyniki uzyskane w próbie (tymi wynikami są średnia waga oraz odchylenie standardowe wagi opakowania śrubek) mają być sformułowane wnioski dotyczące ogółu tych opakowań (czyli ich populacji generalnej), należy zastosować odpowiednie narzędzia, umożliwiające uogólnienie wyników z próby na populację (czyli narzędzia wnioskowania statystycznego, zwane również statystyką matematyczną). Warunkiem uogólnienia tych wyników z określonym prawdopodobieństwem (w naszym przykładzie równym 98%) jest reprezentatywny charakter próby, co oznacza, że:

- musi ona zostać pobrana w sposób losowy, tzn. każda jednostka populacji generalnej (czyli każde 10-kilogramowe pudełko śrubek) ma znane i różne od zera prawdopodobieństwo wylosowania do próby,
- liczebność próby będzie odpowiednio duża.

Aby pierwsze kryterium zostało spełnione, próba musi zostać pobrana w odpowiedni sposób. Stosowanymi najczęściej w praktyce schematami losowania dającymi próbie losowy charakter są przede wszystkim losowanie za pomocą liczb losowych oraz losowanie metodą doboru

Fragment rozdziału (wersja robocza 1): Chybalski F., *Uogólnianie wyników z wykorzystaniem metod wnioskowania statystycznego*, [w:] I. Staniec (red.) „Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją”, C.H. Beck, Warszawa 2013, s. 25-47.

systematycznego. W analizowanym przykładzie można zastosować zarówno jeden jak i drugi schemat losowania, niemniej schemat losowania metodą doboru systematycznego wydaje się być tu łatwiejszy do zastosowania, ponieważ polega on na wybieraniu do próby „co któregoś” pudełka z linii technologicznej. Aby odpowiedzieć na pytanie, co które pudełko powinno zostać odłożone z linii i w ten sposób umieszczone w próbie, znana musi być liczebność populacji generalnej oraz pożądana liczebność próby. Wiadomo, że losowanie będzie dokonywane w przeciągu jednego dnia na trzech kolejnych zmianach produkcyjnych (każda trwa 8 godz.) W ciągu jednej godziny taśmę opuszcza 360 10-kilogramowych pudełek śrubek. Wynika stąd, że próba zostanie pobrana spośród 8640 pudełek. Interwał losowania ustala się za pomocą następującego wzoru:

$$k = \frac{N}{n} \quad (2.1)$$

Aby ustalić pożądaną liczebność próby, należy doprecyzować, w jaki sposób udzielona zostanie odpowiedź na pierwsze pytanie, czyli dotyczące przeciętnej wagi pudełka śrubek. Aby ustalić z zadaniem prawdopodobieństwem (mniejszym od 1), ile wynosi szacunkowa przeciętna waga pudełka śrubek, należy oszacować odpowiedni przedział ufności. Tylko przedział ufności w przypadku zmiennych losowych ciągłych umożliwia określenia prawdopodobieństwa, że dany parametr statystyczny przyjmuje określoną wartość (wartość z jakiegoś przedziału). W naszym przypadku tym parametrem jest wartość średnia μ (inaczej wartość przeciętna, wartość oczekiwana). **Ponieważ nie znamy rozkładu wagi 10-kilogramowego pudełka śrubek oraz wariancji tej cechy w populacji generalnej, przedział ufności dla średniej może być szacowany wyłącznie dla próby dużej, czyli liczącej więcej niż 30 elementów, według wzoru:**

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (2.2)$$

gdzie:

\bar{X} - średnia wartość cechy, obliczona w próbie,

σ – odchylenie standardowe cechy w populacji generalnej, które w naszym przykładzie jest nieznane i należy je przybliżyć wartością z próby, czyli $\sigma \approx S$, przy czym S liczymy według wzoru 2.8,

n – liczebność próby,

t_{α} - wartość krytyczna, odczytana z tablic rozkładu normalnego tak, że $\phi(t_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$,

$1 - \alpha$ - poziom wiarygodności (prawdopodobieństwo p).

Jak wspomnieliśmy, bezwzględny błąd szacunku $d_{\bar{X}}$ jest równy połowie rozpiętości przedziału ufności, czyli:

Fragment rozdziału (wersja robocza 1): Chybalski F., *Uogólnianie wyników z wykorzystaniem metod wnioskowania statystycznego*, [w:] I. Staniec (red.) „Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją”, C.H. Beck, Warszawa 2013, s. 25-47.

$$d_{\bar{x}} = t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.3)$$

Ponieważ jednak σ nie jest znane, na podstawie próbki wstępnej, liczącej n_0 elementów, obliczamy odchylenie standardowe według wzoru:

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad (2.4)$$

i nim przybliżamy odchylenie standardowe w populacji generalnej σ . Liczebność próby właściwej n obliczamy w takim przypadku z następującego wzoru:¹

$$n = \frac{t_{\alpha, n_0 - 1}^2 \cdot S_1^2}{d_{\bar{x}}^2}. \quad (2.5)$$

Wartość $t_{\alpha, n_0 - 1}$ odczytujemy z tablic rozkładu t-Studenta dla przyjętego poziomu istotności $\alpha=1-p$ oraz n_0-1 stopni swobody. W ten sposób uzyskujemy liczebność próby n .

Następnie, korzystając ze wzoru 2.1, ustalimy wielkość interwału losowania. Po pobraniu n -elementowej próby można przejść do oszacowania przedziału ufności dla średniej (wzór 2.2). Interpretacja otrzymanego przedziału oznacza, że z zadanim prawdopodobieństwem przedział ten pokrywa rzeczywistą wartość średniej w populacji, czy też inaczej, że średnia z zadanim prawdopodobieństwem zawiera się w tym przedziale.

Następnie można przejść do działań zmierzających do udzielenia odpowiedzi na drugie pytanie. Zarząd oczekuje informacji wiarygodnej na poziomie 98% bez wskazania wielkości bezwzględnego błędu szacunku, dlatego posłużymy się tą samą próbą, co w przypadku szacowania przedziału ufności dla średniej wagi pudełka śrubek. **Ponieważ jednak teraz pytanie dotyczy przeciętnego odchylenia od tej średniej, należy oszacować odpowiedni przedział ufności dla miary zmienności, jaką jest wariancja.** Po spierwiastkowaniu wartości krańcowych uzyskanego przedziału dla wariancji, otrzymamy przedział ufności dla odchylenia standardowego (które jest pierwiastkiem wariancji).

Przedział ufności dla wariancji można szacować wyłącznie w sytuacji, gdy rozkład badanej cechy (w tym przypadku wagi pudełka śrubek) jest normalny. Ponieważ my taką informacją nie dysponujemy, musimy odpowiedzieć na pytanie, **czy rozkład wagi pudełka śrubek jest normalny?**

Odpowiedzi na to pytanie można udzielić na podstawie pobranej wcześniej próby, przy czym wiarygodność wnioskowania będzie mniejsza od 1. Wynika to stąd, że znów staramy się odpowiedzieć na pytanie dotyczące populacji generalnej czyniąc to w oparciu o informacje

¹ Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U., Statystyka. Elementy teorii i zadania, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2003, s. 254.

Fragment rozdziału (wersja robocza 1): Chybalski F., *Uogólnianie wyników z wykorzystaniem metod wnioskowania statystycznego*, [w:] I. Staniec (red.) „Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją”, C.H. Beck, Warszawa 2013, s. 25-47.

pochodzące z próby. Podobnie, jak w przypadku przedziału ufności, mamy do czynienia z uogólnianiem wyników z próby na populację. Narzędziem, które pozwala sprawdzić, czy rozkład zmiennej ma określoną postać, jest test statystyczny, za pomocą którego weryfikujemy odpowiednią hipotezę statystyczną.

Dalsza część rozdziału dostępna w:

Chybalski F., *Uogólnianie wyników z wykorzystaniem metod wnioskowania statystycznego*, [w:] I. Staniec (red.) „Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją”, C.H. Beck, Warszawa 2013, s. 25-47, ISBN 978-83-255-4393-8.